ФИНАНСЫ ГОСУДАРСТВА И ПРЕДПРИЯТИЙ

УДК 519.86 **DOI: 10.18413/2409-1634-2016-2-3-62-66**

Дылевский А. В.
Рудалев В.Г.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦЕНЫ АКЦИЙ

1) профессор кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования, доктор технических наук, доцент Воронежский государственный университет, Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия, *nefta@yandex.com*
2) доцент кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия *rudalev@amm.vsu.ru*

Аннотация
Рассматривается задача статистического моделирования динамики цены акций российских и зарубежных эмитентов с заданными показателями риска и доходности при условии нормального распределения доходности. Накладывается естественное ограничение на отрицательную доходность. Предлагаемый подход имеет простую математическую реализацию. Описанный в статье метод моделирования может быть полезен как частными инвесторами, так и крупными инвестиционными фондами. Для реализации метода моделирования написана программа в пакете Matlab. Приводится пример моделирования.
Ключевые слова: акция; котировка; доходность; риск; статистическое моделирование.

Alexander V. Dylevskii
Valeriy G. Rudalev

STATISTICAL MODELING OF SHARE PRICE PERFORMANCE

1) Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Professor at the Department of Technical Cybernetics and Automatic Control, Voronezh State University, 1 Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russia, *nefta@yandex.com*
2) PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Technical Cybernetics and Automatic Control, Docent, 1 Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russia, *rudalev@amm.vsu.ru*

Abstract
The paper considers the problem of statistical modeling of share price performance of the Russian and foreign emitents and the indices of risk and profitability in conditions of normal distribution of profitability. A natural limit for negative profitability is imposed. The offered approach has a simple mathematical realization. The modeling method described in the article can be useful for both private investors, and large investment funds. For realization of the method of modeling the program in Matlab package was written. An example of modeling is given.
Keywords: stock; quotation; profitability; risk; statistical modeling

Введение и постановка задачи

В настоящее время на финансовом рынке как частными инвесторами, так и крупными инвестиционными фондами активно используется алгоритмическая торговля. В основе такого метода торговли лежат различного рода механические торговые системы и торговые роботы, реализующие соответствующие алгоритмы торговли. Основными преимуществами алгоритмической торговли является скорость принятия решения за счет способности быстрой обработки большого объема биржевой информации, возможность быстрого выставления и снятии торговых заявок, возможность реализации сложных систем управления рисками, отсутствие психологических проблем при принятии торговых решений. При этом разработка торговых стратегий предполагает анализ биржевых котировок ценных бумаг, настройку параметров и обязательное тестирование торгового алгоритма на различных исторических данных. Этап тестирования требует особой тщательности и является достаточно трудоемким. Существенно упростить этот этап можно за счет генерирования котировок с заданными показателями (характеристиками), что, кроме того, позволит исключить возможность подгонки алгоритма под конкретные исторические данные.

Наряду с алгоритмической торговлей на финансовом рынке широко используется портфельный подход, в основе которого лежит теория портфельных инвестиций, разработанная Г.Марковицем [5], У.Шарпом [7] и другими исследователями. Основным результатом этой теории является теоретико-вероятностная формализация понятий доходности и риска – наиболее важных показателей эффективности инвестиций. В частности, в теории Г.Марковица [5] ожидаемая доходность портфеля ценных бумаг определяется как среднее значение распределения вероятностей, а риск – как стандартное отклонение возможных значений доходности. При этом предполагается, что распределение доходности имеет форму нормального распределения, которое полностью определяется математическим ожиданием и стандартным отклонением доходности. Однако в [1] было показано, что в большинстве случаев разброс показателей доходности ценных бумаг отклоняется от нормального распределения за счет смещения вправо. Этот эффект обусловлен тем, что доходность ценных бумаг может быть сколь угодно большой, а потери не могут превышать 100%.

Таким образом, возникает задача моделирования динамики биржевых котировок ценных бумаг с заданными показателями риска и доходности при условии нормального распределения доходности.

Описание метода решения

Пусть $S_i > 0$ – цена некоторой акции в i-й момент времени, $i = \overline{0, N}$. Определим доходность акции (в процентах) за i-й период времени по следующей формуле:

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \cdot 100\%, \; i = \overline{1, N}. \qquad (1)$$

Так как цена акции предполагается положительной величиной $S_i > 0$, то из формулы (1) сразу следует, что

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \cdot 100\% = \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1\right) \cdot 100\% > -100\%. \qquad (2)$$

Поэтому потери (отрицательная доходность) за i-й период времени не могут быть равными или превышать 100%.

Из формулы выразим цену акции в i-й момент времени через цену акции в предыдущий момент времени и доходность. Получаем

$$S_i = S_{i-1}\left(\frac{R_i}{100\%} + 1\right). \qquad (3)$$

Будем предполагать, что R_i является значением случайной величины R, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием μ и среденеквадратическим отклонением σ, т. е. $R \sim N(\mu, \sigma^2)$. Таким образом, согласно формуле (3) для моделирования динамики цены акции на заданном временном отрезке достаточно осуществить генерирование нормально распределённой случайной величины. Однако непосредственное применение такого подхода может привести к нарушению условия (2). Чтобы гарантировать выполнение этого условия на i-м промежутке времени следует на i-м шаге генерировать нормально распределенную случайную величину до тек пор, пока условие (2) не будет выполнено. Очевидно, что применение описанной процедуры может изменить распределение доходностей. Эта проблема известна и отражает практический смысл доходности. Действительно, в [1] отмечается, что в большинстве случаев разброс показателей доходности финансовых инструментов отклоняется от нормального распределения за счет смещения вправо. Этот эффект обусловлен тем, что доходность ценных бумаг может быть сколь угодно большой, в то время как потери имеют нижний предел и не могут превышать 100 %. Для описания разброса показателей доходности более подходит кривая логарифмически нормального распределения, у которой правый хвост несколько длиннее, чем левый [1].

Следует отметить, что для моделирования динамики биржевых котировок акций были предложены диффузионно-скачкообразные модели Мертона [4, 6] и Бейтса [3]. В работе [2] для описания скачков цен рассматривались модели Мертона и Бейтса с применением эрланговского закона появления разрывов в траекториях цен акций. В моделях Мертона и Бейтса динамика цены акции описывается случайным процессом с непрерывным временем, порождаемым аддитивной смесью диффузионного и скачкообразного процессов, который можно представить как решение стохастического дифференциального уравнения. В частности, для обобщенной модели Мертона разностная схема с шагом h_i имеет вид:

$$S_i = S_{i-1}\left(h_i(\mu - \xi) + \sigma\sqrt{h_i}W_i + Y_i\right), \; S_0 \sim f_0(x),$$
$$W_i \sim N(0,1), \; i = \overline{1, N}. \qquad (4)$$

Здесь $S_i > 0$ – цена акции, μ – ожидаемая доходность, σ – волатильность, ν – вариация, характеризующая изменчивость цены акции, Y_i – независимые и одинаково распределенные скалярные случайные величины, имеющие логарифмически нормальное распределение с параметрами γ и δ, величина ξ зависит от параметров γ и δ и интенсивности λ эрланговского процесса порядка M, который формируется в результате пропуска подряд $M-1$ события пуассоновского потока интенсивности λ, $\xi = \frac{\lambda}{M}\left(e^{\delta^2/2+\gamma}-1\right)$. Начальная цена S_0 имеет заданное распределения (задана плотность вероятности $f_0(x)$). Нетрудно заметить, что при постоянном шаге сетки $h = h_i$ уравнение (4) принимает вид

$$S_i = S_{i-1}\left(h(\mu-\xi)+\sigma\sqrt{h}W_i+Y_i\right) \qquad (5)$$

и после некоторых преобразований может быть сведено к виду (3).

Ниже приводится фрагмент программы, реализованной в среде Matlab, осуществляющей моделирование динамики цены акций с нормально распределенной доходностью:

```
MU=0.2728; % математическое ожидание доходности акции (в %)
SIGMA=1.4477; % среднеквадратическое отклонение % доходностей акции (в %)
N=100; % количество котировок
N1=N+1;
S0=100; % начальная цена акции
S(1)=normrnd(S0,SIGMA); % случайная цена акции в начальный момент
for i=2:N1,
R(i)=normrnd(MU,SIGMA);
while R(i)<=-100, % пока потери не менее 100%
R(i)=normrnd(MU,SIGMA);
end
S(i)=S(i-1)*(R(i)/100+1); % определяем цену акции в i-й момент времени
end
figure(1)
plot([0:N],S) % график котировок
grid on
figure(2)
histfit(R) % гистограмма доходностей с наложенной функцией
% плотности вероятности нормального закона
```

На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты моделирования динамики цены акции с доходностью $\mu = 0{,}2728\%$ и риском $\sigma = 1{,}4477\%$. На рис.1 изображен график котировок, а на рис.2 – гистограмма доходностей с наложенной функцией плотности вероятности нормального закона. Для сравнения на рис. 3 и рис.4 представлены соответствующие графики для обыкновенных акций Сбербанка в период с 05.02.2016 по 01.07.2016.

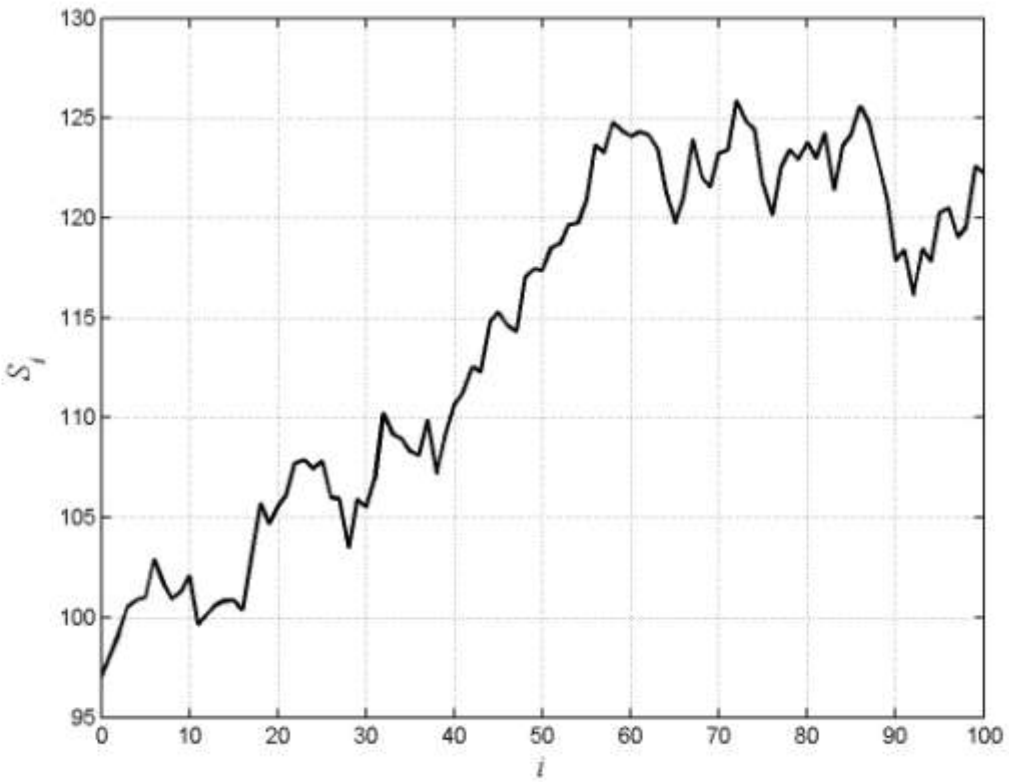

Рис. 1. Моделирование котировок акции
Fig. 1. Modeling of stocks quotes

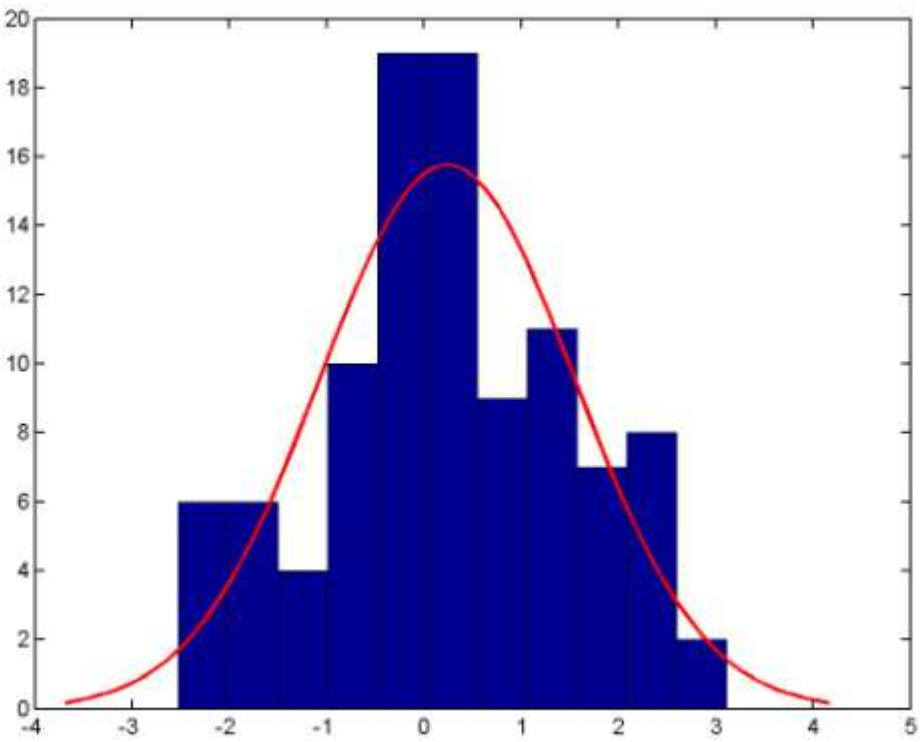

Рис. 2.Гистограмма моделированных доходностей акций
Fig. 2. The histogram of simulated stock yield

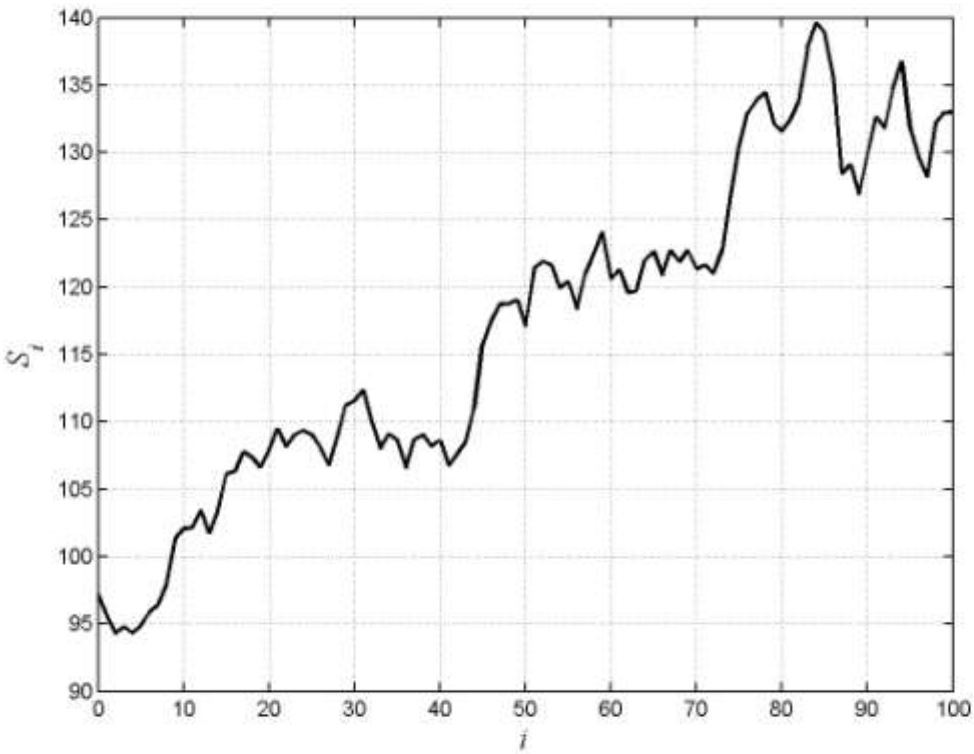

Рис. 3. Котировки обыкновенных акций Сбербанка
Fig. 3. Quotes of ordinary stocks of Sberbank

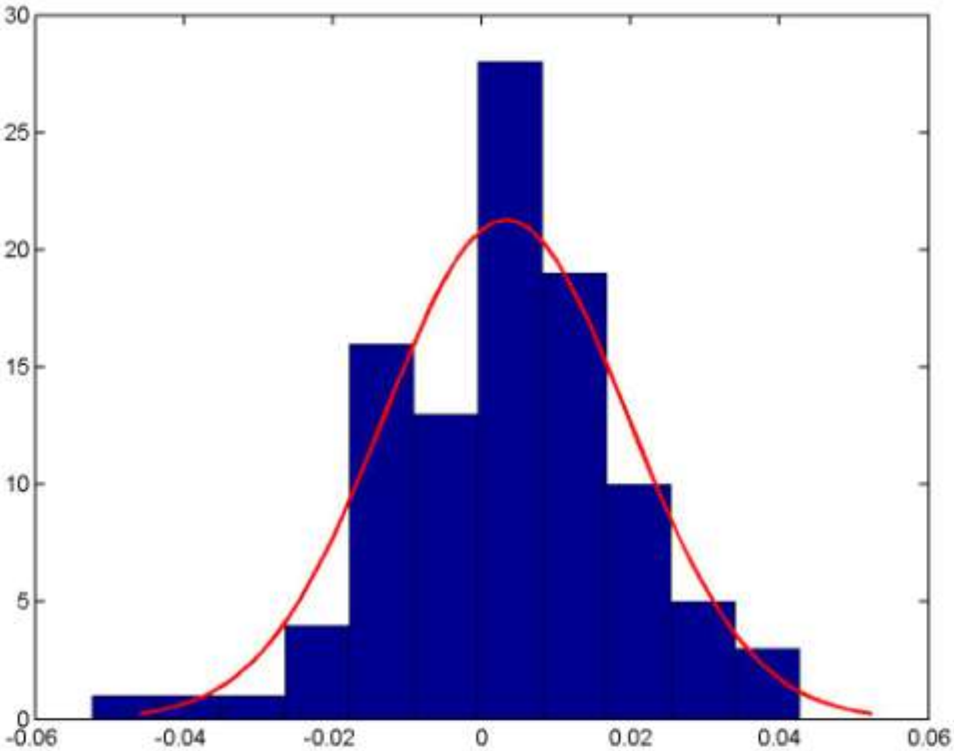

Рис. 4. Гистограмма доходностей обыкновенных акций Сбербанка
Fig. 4. The histogram of yields of ordinary stocks of Sberbank

Список литературы

1. Берзон, Н. И., Дорошин, Д. И. Особенности применения показателей эффективности финансовых инвестиций // Финансы и кредит. 2012. № 14 (494). С. 21-33.
2. Кожевников, А. С. Программное обеспечение для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли // Электронный журнал «Труды МАИ». 2012. Выпуск № 59.
3. Bates, D. Jump and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options // Review of financial studies. No. 9 (1996): P. 69-107.
4. Henriksson, R., Merton, R. On market timing and investment performance: statistical procedures for evaluating forecasting skills // Journal of business. No. 54 (1981): 513-533.
5. Markowitz, H. Portfolio selection // Journal of finance. Vol. 7, No. 1 (1952): P. 77-91.
6. Merton, R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // Journal of financial economics. No. 3 (1976): P. 125-144.
7. Sharpe, W. F. The Sharpe ratio // Journal of portfolio management. (Fall 1994): P. 49-58.

References

1. Berzon, N. I., Doroshin, D. I., 2012. Features of the Application Performance of Financial Investments // Finansy i Kredit. No. 14 (494). Pp. 21-33.
2. Kozhevnikov, A., 2012. Software for Statistical Modeling and Analysis of Random Processes with Leaps Describing Dynamics of Stock Prices of the Aviation Industry Enterprises // Ehlektronnyj zhurnal «Trudy MAI». Issue 59.
3. Bates, D. Jump and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options // Review of financial studies. No. 9 (1996): P. 69–107.
4. Henriksson, R., Merton, R., 1981. On market timing and investment performance: statistical procedures for evaluating forecasting skills // Journal of business. No. 54: 513–533.
5. Markowitz, H., 1952. Portfolio selection. Journal of finance. Vol. 7, No. 1, p. 77–91.
6. Merton, R., 1976. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // Journal of financial economics. No. 3, p. 125–144.
7. Sharpe, W. F. The Sharpe ratio // Journal of portfolio management. (Fall 1994): P. 49–58.