

УДК 621.396.01

DOI: 10.18413/2518-1092-2019-4-3-0-2

Черноморец А.А.
Болгова Е.В.
Черноморец Д.А.

О КВАЗИСУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦАХ КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы, д. 85,
г. Белгород, 308015, Россия

e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru

Аннотация

В статье исследованы свойства квазисубполосных матрицах косинус-преобразования, используемых при субполосном анализе-синтезе сигналов и изображений. Показано, что их собственные числа могут иметь положительные и отрицательные значения; предложены оценки их количества; показано, что сумма квазисубполосных матриц, соответствующих разбиению области определения косинус преобразования, равна нулевой матрице; и др. Приведены примеры субполосных компонент изображений, выделяемых с помощью квазисубполосных матриц, приведены примеры построения базисных изображений, полученных на основании произведения собственных векторов исследуемых матриц.

Ключевые слова: изображение; косинус преобразование; квазисубполосная матрица; подобласть пространственных частот; собственные числа и векторы

UDC 621.396.01

Chernomorets A.A.
Bolgova E.V.
Chernomorets D.A.

ON QUASI-SUBBAND MATRICES OF COSINE TRANSFORM

Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru

Abstract

In the article we explore the properties of quasi-subband cosine transform matrices used in subband analysis and synthesis of signals and images. It is shown that their eigenvalues can have positive and negative values; the estimates of their quantity are proposed. It is shown that the sum of quasi-subband matrices corresponding to the partition of the domain of definition of the cosine transform is equal to the zero matrix. In the article we demonstrate the examples of images subband components extracted by using quasi-subband matrices; the examples of the basic images obtained by using the product of the eigenvectors of the analysed matrices under study are given.

Keywords:

image, cosine transform, quasi-subband matrix, subdomain of spatial frequency, eigenvalues and eigenvectors.

ВВЕДЕНИЕ

Отображение информации в виде цифровых изображений широко используется во всех сферах деятельности человека. Представляется важной разработка новых подходов цифровой обработки изображений, обеспечивающих адекватное решение существующих и новых задач в данной области. Одним из таких направлений является субполосный анализ-синтез изображений в рамках двумерного косинус преобразования, в основе которого лежит математический аппарат субполосных матриц [1, 2, 3] данного преобразования. Субполосный анализ-синтез в рамках косинус преобразования основан на анализе распределения частей энергии при косинус

преобразовании по подобластям пространственных частот, на которые разбивается область определения данного преобразования.

В рамках субполосного анализа рассматриваются изображения, представленные в виде матрицы $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, значений яркости его пикселей. Тогда, элементы субполосных матриц $G_{r_1} = (g_{ik}^{r_1})$, $i, k = 1, 2, \dots, N_1$, и $G_{r_2} = (g_{mn}^{r_2})$, $m, n = 1, 2, \dots, N_2$, косинус преобразования, соответствующих подобластям $V_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, пространственных частот, полученных при разбиении области определения преобразования на $R_1 \times R_2$ равных подобластей, следующего вида:

$$V_{r_1 r_2} = \{(u, v) | u_{r_1,1} \leq u < u_{r_1,2}, v_{r_2,1} \leq v < v_{r_2,2}\}, i = 1, 2, \dots, N_1, k = 1, 2, \dots, N_2, \quad (1)$$

$$u_{r_1,1} = (r_1 - 1)\sigma_1, u_{r_1,2} = r_1\sigma_1, v_{r_2,1} = (r_2 - 1)\sigma_2, v_{r_2,2} = r_2\sigma_2,$$

$$\sigma_1 = \pi / R_1, \sigma_2 = \pi / R_2,$$

определяются на основании следующих соотношений:

$$g_{ik}^{r_1} = a_{ik}^{r_1} + h_{ik}^{r_1}, \quad (2)$$

где $a_{ik}^{r_1}$ – значения элементов субполосной матрицы A_{r_1} экспоненциального преобразования Фурье [4]:

$$a_{ik}^{r_1} = \begin{cases} \frac{\sin(u_{r_1,2}(i-k)) - \sin(u_{r_1,1}(i-k))}{\pi(i-k)}, & i \neq k, \\ \frac{u_{r_1,2} - u_{r_1,1}}{\pi}, & i = k, \end{cases} \quad (3)$$

$h_{ik}^{r_1}$ – значения элементов квазисубполосной матрицы H_{r_1} косинус преобразования [3] (квази СМКП):

$$h_{ik}^{r_1} = \frac{\sin(u_{r_1,2}(i+k-1)) - \sin(u_{r_1,1}(i+k-1))}{\pi(i+k-1)} \quad (4)$$

значения элементов $g_{mn}^{r_2}$, вычисляются аналогично (2)-(4).

Свойства субполосных матриц экспоненциального преобразования Фурье (3) и субполосных матриц (2) косинус преобразования исследованы во многих работах [3, 5, 6].

Представляет интерес исследование свойств квазисубполосной матрицы H_r косинус преобразования с элементами вида (4). Далее для удобства изложения материала будем рассматривать изображения размерности $N \times N$ и разбиение области определения косинус преобразования осуществим на $R \times R$ подобластей.

Размерность квазисубполосной матрицы H_r косинус преобразования имеет значение $N \times N$, данное свойство следует из определения (4).

Квазисубполосные матрицы косинус преобразования является симметричными, что следует из определения (4). Визуальное представление значений элементов восьми квази СМКП H_r , $r = 1, 2, \dots, R$, соответствующих различным подобластям пространственных частот вида (1), для случая $N = 32$, $R = 8$ приведено на рисунке 1, на котором яркость пикселей изображений увеличивается с увеличением значений элементов данных матриц.

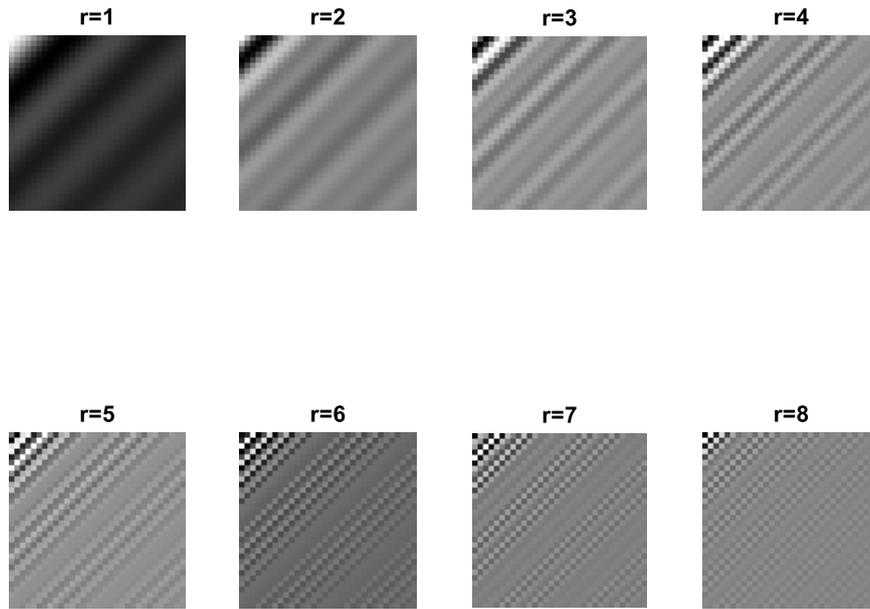


Рис. 1. Визуальное представление квазисубполосных матриц косинус преобразования при $N = 32$, $R = 8$
Fig. 1. Visualization of quasi-subband matrices of cosine transform for $N = 32$, $R = 8$

Квазисубполосная матрица H_r косинус преобразования также является вещественной, что следует из определения (4). Следовательно, она обладает полным набором собственных векторов \vec{q}_k^r , $k=1,2,\dots,N$, образующих ортонормированный базис, и набором соответствующих собственных чисел λ_k^r , $k=1,2,\dots,N$:

$$H_r \vec{q}_{k_1}^r = \lambda_{k_1}^r \vec{q}_{k_1}^r, \quad H_r \vec{q}_{k_2}^r = \lambda_{k_2}^r \vec{q}_{k_2}^r, \quad (5)$$

$$(\vec{q}_{k_1}^r, \vec{q}_{k_2}^r) = \begin{cases} 1, & k_1 = k_2, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$k_1, k_2 = 1, 2, \dots, N.$$

Квази СМКП H_r можно представить, на основании приведенных ранее свойств, в виде произведения матриц Q_r и L_r , где столбцы матрицы Q_r образованы собственными векторами матрицы H_r , матрица L_r – диагональная матрица с собственными числами матрицы H_r , расположенными на диагонали:

$$H_r = Q_r^T L_r Q_r. \quad (6)$$

Можно показать, что сумма квазисубполосных матриц H_r , $r=1,2,\dots,R$, равна нулевой матрице Z :

$$\sum_{r=1}^R H_r = Z. \quad (7)$$

Справедливость соотношения (7) следует из определений (1), (4).

Квази СМКП имеет неотрицательные и отрицательные собственные числа. Пример значений собственных чисел квази СМКП при $N = 32$, $R = 8$ в виде диаграммы приведен на рисунке 2.

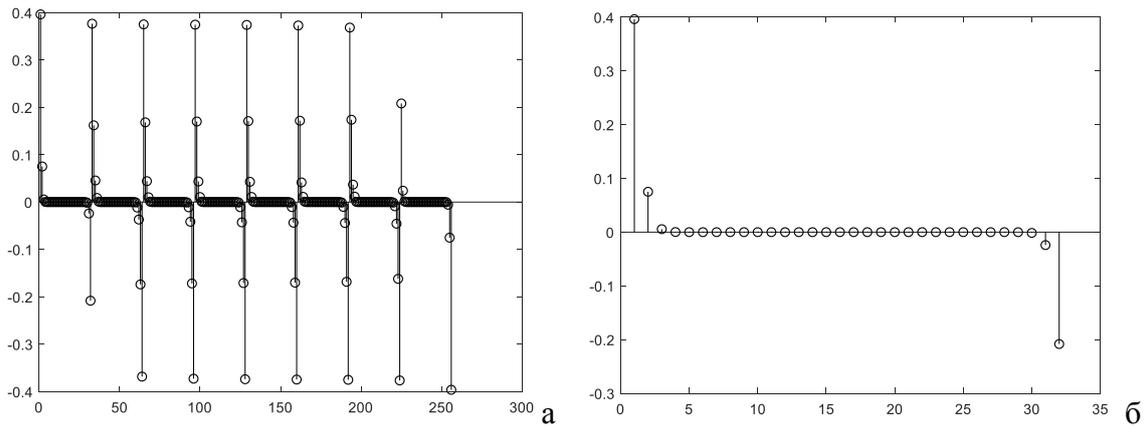


Рис. 2. Иллюстрация значений собственных чисел квази СМКП:

а – значения собственных чисел 8 квази СМКП H_r , $r = 1, 2, \dots, 8$,

б – значения собственных чисел матрицы H_1

Fig. 2. Visualization of the values of the eigenvalues of quasi-subband matrices of cosine transform:

а – eigenvalues of 8 quasi-subband matrices of cosine transform H_r , $r = 1, 2, \dots, 8$,

б – eigenvalues of single matrix H_1

На основании различных вычислительных экспериментов получено, что квази СМКП не имеют близких к единице собственных чисел.

Результаты оценивания количества положительных и отрицательных собственных чисел квази СМКП H_r , $r = 1, 2, \dots, R$, соответствующих различным частотным подобластям, в зависимости от размерности N при $R = 8$ приведены в таблицах 1 и 2. При этом собственное число λ_k^r считается положительным, если выполняется условие:

$$\lambda_k^r > \varepsilon_0, \quad (8)$$

собственное число λ_k^r считается отрицательным, если выполняется условие:

$$\lambda_k^r < -\varepsilon_0, \quad (9)$$

где

$$\varepsilon_0 = 0.001.$$

Таблица 1

Результаты оценивания количества J_{pos} положительных собственных чисел квази СМКП при $R = 8$

Table 1

Results of estimating of the number J_{pos} of positive eigenvalues of quasi-subband matrices of cosine transform for $R = 8$

N	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$
32	3	5	4	4	4	4	4	3
64	4	6	6	6	6	6	6	3
128	4	7	7	7	7	7	6	4
256	5	7	8	8	8	8	8	4
512	5	9	9	9	9	9	8	5

Таблица 2

Результаты оценивания количества J_{Neg} отрицательных собственных чисел квази СМКП при $R = 8$

Table 2

Results of estimating of the number J_{Neg} of negative eigenvalues of quasi-subband matrices of cosine transform for $R = 8$

N	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$
32	3	4	4	4	4	4	5	3
64	3	6	6	6	6	6	6	4
128	4	6	7	7	7	7	7	4
256	4	8	8	8	8	8	7	5
512	5	8	9	9	9	9	9	5

На основании проведенных различных вычислительных экспериментов (отдельные результаты которых приведены в таблицах 1 и 2) можно считать, что оценка количества положительных J_{Pos} и отрицательных J_{Neg} собственных чисел квази СМКП определяется следующими соотношениями:

$$J_{Pos} \approx J_{Neg} \approx \log_2 \frac{N}{R} + 3.$$

Известно [2, 4, 7], что при субполосном анализе в рамках заданного унитарного преобразования выделение (фильтрации) субполосных компонент $Y_{r_1 r_2}$ изображения Φ , соответствующих заданной подобласти пространственных частот $V_{r_1 r_2}$ вида (1), основано на следующем соотношении:

$$Y_{r_1 r_2} = A_{r_1} \Phi B_{r_2}, \quad (10)$$

для вычисления значений частей энергии изображения, соответствующих заданной подобласти пространственных частот $V_{r_1 r_2}$, используется следующее соотношение:

$$E_{r_1 r_2} = tr(A_{r_1} \Phi B_{r_2} \Phi^T), \quad (11)$$

где A_{r_1} и B_{r_2} – субполосные матрицы заданного унитарного преобразования, соответствующие подобласти $V_{r_1 r_2}$ вида (1).

Можно показать, что если в выражении (10) использовать квазисубполосные матрицы (4), то сумма компонент изображений вида (10), соответствующих всем подобластям, на которые разбита область определения косинус преобразования, равна нулевому изображению Z , значения всех пикселей которого равны нулю:

$$\sum_{r_1=1}^R \sum_{r_2=1}^R H_{r_1} \Phi H_{r_2} = Z, \quad (12)$$

при этом сумма величин вида (11), вычисленных для всех подобластей, при использовании квазисубполосных матриц (4), равна нулю:

$$\sum_{r_1=1}^R \sum_{r_2=1}^R tr(H_{r_1} \Phi H_{r_2} \Phi^T) = Z. \quad (13)$$

На рисунке 3 приведены примеры субполосных компонент (10) тестового изображения (рисунок 3а), соответствующих низкочастотным, среднечастотным и высокочастотным подобластям пространственных частот, при применении квази СМКП в соотношении (10).

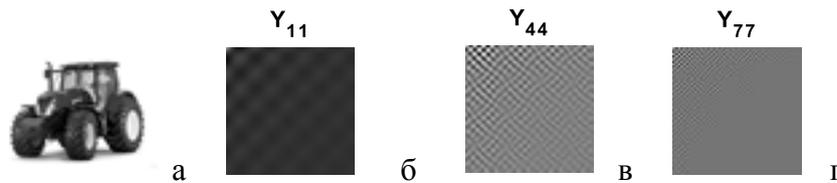


Рис. 3. Пример выделения субполосных компонент изображения при применении квази СМКП при $R = 8$: а – исходное изображение;

результаты квазифильтрации: б – в подобласти V_{11} , в – в подобласти V_{44} , г – в подобласти V_{77}

Fig. 3. An example of the allocation of image subband components when applying quasi-subband matrices of cosine transform for $R = 8$: а – the original image;

quasifiltration results: б – in the subdomain V_{11} , в – in the subdomain V_{44} , г – in the subdomain V_{77}

Пример распределения по частотным подобластям значений величин вида (11) при применении квази СМКП для преобразований изображения, представленного на рисунке 3а, и $K=8$ приведен на рисунке 4.

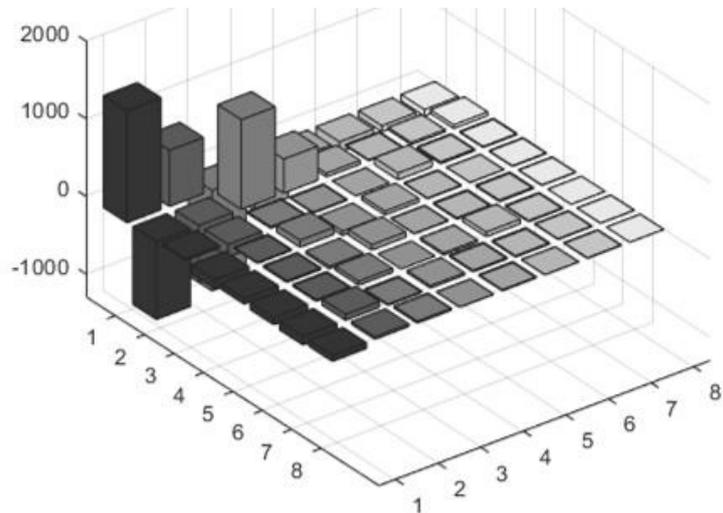


Рис. 4. Пример распределения по частотным подобластям значений величин вида (11) при применении квази СМКП

Fig. 4. An example of the distribution over frequency subdomains of values (11) when applying quasi-subband matrices of cosine transform

Данные, отображенные на рисунке 4, показывают, что величины вида (11) при применении квази СМКП могут принимать отрицательные значения.

Интерес представляет разложение изображения $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, в базе собственных векторов квази СМКП H_{r_1} и H_{r_2} , соответствующих заданной частотной подобласти $V_{r_1 r_2}$. Можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\Gamma = Q^T \Phi U, \quad (14)$$

$$\Phi = Q \Gamma U^T, \quad (15)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \gamma_{ik} \bar{q}_i \bar{u}_k^T. \quad (16)$$

где Q и U – матрицы, столбцы которых составлены из собственных векторов $\{\bar{q}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, и $\{\bar{u}_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, матриц H_{r_1} и H_{r_2} соответственно,

γ_{ik} , $i=1,2,\dots,N_1$, $k=1,2,\dots,N_2$, – элементы матрицы Γ , значения которых определяются следующим соотношением:

$$\gamma_{ik} = \bar{q}_i^T \Phi \bar{u}_k, \quad i=1,2,\dots,N_1, \quad k=1,2,\dots,N_2. \quad (17)$$

Таким образом, изображение Φ может быть синтезировано на основании следующего соотношения:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \gamma_{ik} X_{ik}. \quad (18)$$

где X_{ik} – базисные изображения следующего вида:

$$X_{ik} = \bar{q}_i \bar{u}_k^T, \quad i=1,2,\dots,N_1, \quad k=1,2,\dots,N_2. \quad (19)$$

В качестве примера для изображения, приведенного на рисунке 3а, значения элементов матрицы Γ (14), (17) для частотных подобластей V_{11} и V_{32} при $R=8$ представлены в виде диаграмме на рисунке 5.

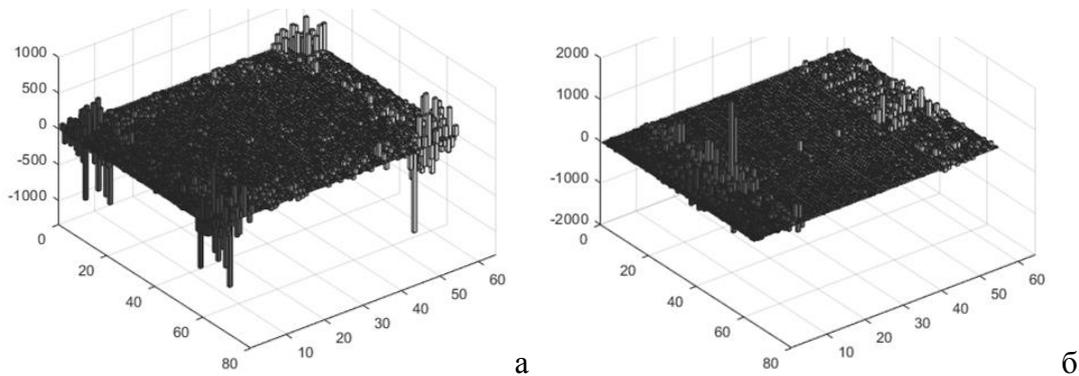


Рис. 5. Пример значений элементов матрицы Γ :

а – для подобласти V_{11} , б – для подобласти V_{32}

Fig. 5. An example of the values of the matrix G elements:

а – for the subdomain V_{11} , б – for the subdomain V_{32}

На рисунке 6 приведены примеры базисных изображений (19), полученных на основании собственных векторов квази СМКП при $N = 32$, $R = 8$ для подобласти V_{32} .

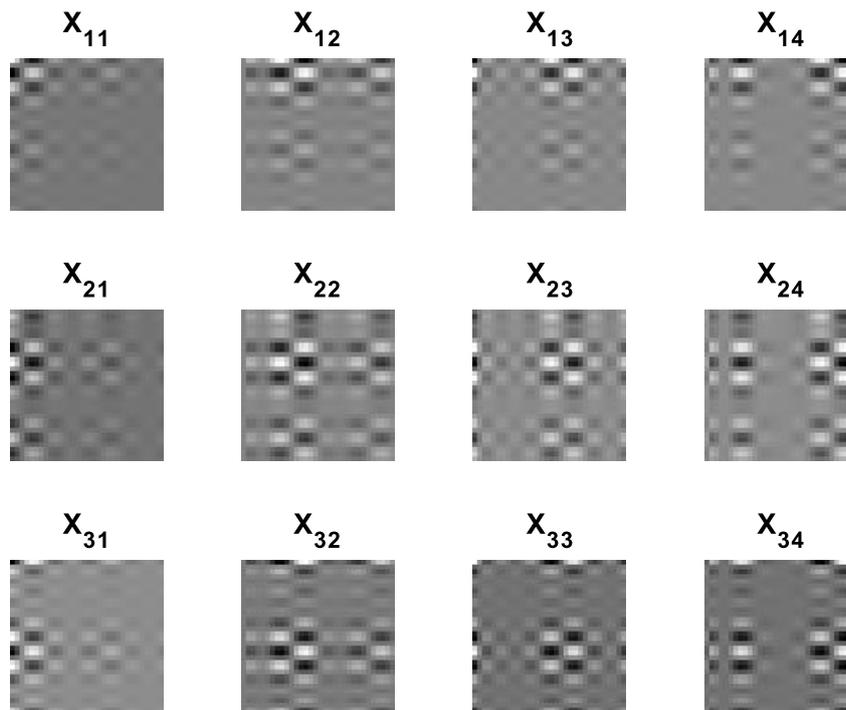


Рис. 6. Примеры базисных изображений в базисе собственных векторов квази СМКП при $N = 32$, $R = 8$ для подобласти V_{32}

Fig. 6. Examples of basic images in the basis of the eigenvectors of quasi-subband matrices of cosine transform for $N = 32$, $R = 8$ for the subdomain V_{32}

Изображения, приведенные на рисунке 6, показывают, что базисные изображения, полученные на основании собственных векторов квази СМКП, имеют различные частотные составляющие для различных собственных векторов.

Таким образом, рассмотренные свойства квазисубполосных матриц косинус преобразования могут быть использованы при разработке методов анализа, синтеза и хранения цифровых изображений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00657.

Список литературы

1. Черноморец А.А., Болгова Е.В. Об анализе данных на основе косинусного преобразования // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 2015. № 1 (198). С. 68-73.
2. Черноморец А.А., Болгова Е.В., Черноморец Д.А. Обобщенный субполосный анализ на основе унитарных преобразований // Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. – 2015. – № 7 (204). – Вып. 34/1. – С. 97-104.
3. Болгова Е.В. Свойства субинтервальных матриц двумерного косинусного преобразования // Информационные системы и технологии. 2017. № 6 (104). С. 19-28.
4. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Белов А.С., Болгова Е.В. О субполосных свойствах изображений // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 2013. № 7 (150). С. 175-182.
5. Черноморец А.А., Прохоренко Е.И., Голощапова В.А. О свойствах собственных векторов субполосных матриц // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 2009. № 7 (62). С. 122-128.
6. Болгова Е.В. О собственных числах субинтервальных матриц косинусного преобразования // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 2017. № 2 (251). С. 92-101.

7. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А. Об оптимальном выделении субполосных компонент изображений // Информационные системы и технологии. 2013. № 1 (75). С. 5-11.

References

1. Chernomorets A.A., Bolgova E.V. On the analysis of data based on the cosine transformation. // Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies. 2015. No. 1(198). P. 68-73.
2. Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Chernomorets D.A. Generalized subband analysis based on unitary transformations // Scientific reports of BelSU. Ser. Economy. Informatics. – 2015. – No. 7 (204). – Vol. 34/1. – P. 97-104.
3. Bolgova E.V. Properties of sub-interval matrices of two-dimensional cosine transform // Information systems and technologies. 2017. No. 6 (104). P. 19-28.
4. Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Belov A.S., Bolgova E.V. About subband image properties // Scientific reports of Belgorod State University. Series: Economics. Informatics. 2013. No. 7 (150). P. 175-182.
5. Chernomorets A. A., Prokhorenko E. I., Goloshchapova V. A. About the properties of eigenvectors of subband matrices // Scientific statements of Belgorod State University. Series: Economics. Informatics. 2009. No. 7(62). P. 122-128
6. Bolgova E.V. On the eigenvalues of sub-interval matrices of cosine transform // Scientific reports of Belgorod State University. Series: Economics. Informatics. 2017. No. 2 (251). P. 92-101.
7. Zhilyakov EG, Chernomorets A.A. On the optimal allocation of subband image components // Information Systems and Technologies. 2013. No. 1 (75). P. 5-11.

Черноморец Андрей Алексеевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры прикладной информатики и информационных технологий

Болгова Евгения Витальевна, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и информационных технологий

Черноморец Дарья Андреевна, магистрант кафедры математического и программного обеспечения информационных систем

Chernomorets Andrey Alekseevich, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Applied Informatics and Information Technologies

Bolgova Evgeniya Vitalievna, Senior Lecturer, Department of Applied Informatics and Information Technologies

Chernomorets Daria Andreevna, master student, Department of Mathematical and Software Information Systems