УДК 681.5.013 **DOI: 10.18413/2518-1092-2021-6-4-0-3**

Дылевский А.В.[1]
Хрипушин Д.А.[2]

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

[1)] Воронежский филиал Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова,
ул. Карла Маркса, д. 67А, г. Воронеж, 394030, Россия
[2)] Воронежский государственный университет, Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия

e-mail: nefta@yandex.ru, wittnauers@gmail.com

Аннотация
Рассматривается задача автоматического прогнозирование некоторого класса детерминированных сигналов. Такие задачи возникают как в теории автоматического управления, так и в различных приложениях, где требуется получить прогноз по наблюдаемой реализации. Класс рассматриваемых в статье сигналов достаточно широкий. Для решения поставленной задачи используется разложение экспоненциальной передаточной функции в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням передаточной функции реализуемого дифференцирующего звена. Аппроксимируемая передаточная функция является трансцендентной и бесконечномерной. Разложение в ряд Бурмана-Лагранжа позволяет осуществить регуляризацию некорректной задачи. Точность прогнозирования может быть увеличена за счет параметра регуляризации, а также за счет увеличения числа членов ряда Бурмана-Лагранжа. Приводятся результаты моделирования построенного в статье автоматического прогнозатора. Приведенные результаты показывают хорошую точность прогнозирования. Предложенный метод синтеза автоматических прогнозаторов может быть применен для других классов сигналов, в том числе для прогнозирования зашумленных сигналов.
Ключевые слова: автоматическое прогнозирование; детерминированный сигнал; передаточная функция; дифференциатор.
Для цитирования: Дылевский А.В., Хрипушин Д.А. Автоматическое прогнозирование детерминированных сигналов // Научный результат. Информационные технологии. – Т.6, №4, 2021 – С. 20-26. DOI: 10.18413/2518-1092-2021-6-4-0-3

Dylevsky A.V.[1]
Khripushin D.A.[2]

AUTOMATIC PREDICTION OF DETERMINISTIC SIGNALS

[1)] Voronezh branch of the Russian University of Economics named after G.V. Plekhanov
67A Karl Marx St., Voronezh, 394030, Russia
[2)] Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018, Russia

e-mail: nefta@yandex.ru, wittnauers@gmail.com

Аннотация
The problem of automatic prediction of a certain class of deterministic signals is considered. Such problems arise both in the theory of automatic control and in various applications where it is required to obtain a forecast for the observed realization. The class of signals considered in the article is quite wide. To solve this problem we use a Bourman-Lagrange series of the exponential transfer function in terms of the powers of the transfer function of the realized differentiating plant. The approximated transfer function is transcendental and infinite-dimensional. The Burman-Lagrange series allows the regularization of an incorrect problem. The prediction accuracy can be increased due to the regularization parameter, as well as by increasing the number of terms of the Burman-Lagrange series. The results of modeling of the automatic predictor constructed in the article are presented. These results show good prediction accuracy. The proposed method of synthesis of automatic predictors can be applied to other classes of signals, including the prediction of noisy signals.
Keywords: automatic prediction; deterministic signal; transfer function; differentiator.

For citation: Dylevsky A.V., Khripushin D.A. Automatic prediction of deterministic signals // Research result. Information technologies. – T.6, №4, 2021. – P. 20-36. DOI: 10.18413/2518-1092-2021-6-4-0-3

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, любые процессы или явления характеризуются некоторыми параметрами. В связи с этим во многих областях возникают задачи прогнозирования параметров: прогнозирование цены на какой-либо финансовый инструмент, прогнозирование числа заболевших определенной болезнью, прогнозирование температуры воздуха или количества осадков и т.д. Один из подходов к решению таких задач основан на построении математических моделей соответствующих явлений или процессов. Например, с помощью математических моделей физических процессов в атмосфере и океане были разработаны гидродинамические методы прогноза погоды [1]. Однако такой подход требует описания сложных математических моделей, а так же знания параметров, характеризующих рассматриваемое явление или процесс. Эти трудности существенно ограничивают применение описываемого подхода.

В прикладных исследованиях нередко возникают ситуации, когда математическое моделирование, основанное на использовании точных законов, оказывается затруднительны, но в распоряжении исследователей оказывается результат наблюдений параметров исследуемого процесса или явления. В этих случаях для решения задач прогнозирования могут быть использованы методы, основанные на анализе наблюдаемых параметров.

В данной статье рассматривается метод автоматического прогнозирования детерминированных сигналов, основанный на применении автоматических дифференциаторов широкого класса сигналов.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Цель работы

Требуется построить автоматическое устройство прогнозирования (прогнозатор) для любого сигнала $g{:}C^{\infty}[0,T]\to R$, $T>0$. Таким образом, прогнозатор должен находить значение $g(t+\tau)$ по известным значениям произвольного сигнала $g(t)$, где $t\in[0,T]$, $\tau > 0$ — время упреждения [2]. Следует отметить, что прогнозатор должен осуществлять автоматическое прогнозирование произвольного, заранее неизвестного сигнала $g(t)$ из класса $C^{\infty}[0,T]$.

Описание метода решения поставленной задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим разложение сигнала $g(t+\tau)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t:

$$g(t+\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(t)\tau^{k}}{k!}. \tag{1}$$

Применим к равенству (1) преобразование Лапласа. Тогда, учитывая свойства преобразования Лапласа, получаем следующее равенство в комплексной области:

$$G(p)e^{\tau p}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(\tau p)^{k}}{k!}G(p)+G_{0,k}(p)\right]. \tag{2}$$

Здесь $G(p)$ — изображение по Лапласу сигнала $g(t)$; $G_{0,k}(p)$ — алгебраический многочлен аргумента p, коэффициенты которого определяются значениями $g^{(i)}(0)$, $i=0,\dots,k-1$, при этом $G_{0,0}(p)\equiv 0$.

Таким образом, для осуществления автоматического прогноза произвольного сигнала требуется реализовать передаточную функцию трансцендентного бесконечномерного объекта $e^{\tau p}$.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим функцию $\Psi: C \to C$, которая является аналитической в некоторой области $G \subseteq C$. Ряд Тейлора для функции $\Psi(p)$ с центром в точке $a \in G$ имеет вид

$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (p-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!}(p-a)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!}(p-a)^n + \Delta_N(p,a), \quad (3)$$

где $\Delta_N(p,a)$ – остаточный член ряда Тейлора,

$$\Delta_N(p,a) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!}(p-a)^n = \frac{(p-a)^{N+1}}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)dz}{(z-p)(z-a)^{N+1}}, \quad (4)$$

C – некоторый замкнутый контур, лежащий в G и содержащий точки p и a. Для нахождения коэффициентов c_n степенного ряда (4) наряду с формулой

$$c_n = \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!}, \; n \in Z_0, \quad (5)$$

можно воспользоваться следующим выражением [5]:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \; n \in Z_0. \quad (6)$$

Отметим, что формула (0) может быть представлена в виде

$$\Psi(p) = \Psi_N(p,a) + \Delta_N(p,a), \; N \in Z_0 \quad (7)$$

где $\Psi_N(p,a)$ — отрезок ряда Тейлора длины $N+1$ или частичная сумма порядка $N+1$ ряда Тейлора,

$$\Psi_N(p,a) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!}(p-a)^n, \; N \in Z_0. \quad (8)$$

Дадим оценку остаточного члена ряда Тейлора $\Delta_N(p,a)$. Обозначим через R радиус круга аналитичности функции $\Psi(p)$ и рассмотрим произвольное число R', $0<R'<R$, и круг $|p-a|=kR'$, где $0<k<1$ — произвольное число. Пусть C — окружность $|z-a|=R'$. Тогда в любом круге $|p-a|<kR'$ имеем оценку [5]

$$|\Delta_N(p,a)| \le \frac{k^{N+1}M(R')}{1-k}. \quad (9)$$

Здесь $M(R')$ — максимум модуля функции $\Psi(p)$ в круге $|p-a| \le R'$.

Найдем тейлоровское разложение функции $\Psi(p)=e^{\tau p}$, $\tau \in R$, с центром в точке $a=0$. Функция $e^{\tau p}$ является аналитической в C. В силу формулы (5) и очевидного соотношения

$$\left. \frac{d^n e^{\tau p}}{dp^n} \right|_{p=0} = \tau^n, \; n \in Z_0,$$

получаем

$$c_n = \frac{\tau^n}{n!}, \; n \in Z_0.$$

Тогда ряд Тейлора для функции $e^{\tau p}$ имеет вид

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} p^n \quad (10)$$

и в силу аналитичности в C функции $e^{\tau p}$ ряд сходится для любого $p \in C$. Оценка остаточного члена $\Delta_N(p,0)$ ряда Тейлора (3) для функции $e^{\tau p}$ определяется неравенством (9) и имеет вид

$$|\Delta_N(p,0)| \le \frac{k^{N+1}M(R')}{1-k},$$

$M(R')$ — максимум модуля функции $e^{\tau p}$ в круге $|p| \le R'$.

Следует отметить следующий важный факт [3]: частичная сумма $\Psi_N(p,0)$ ряда Тейлора функции $\Psi(p)=e^{\tau p}$ $\forall \tau>0$ при $N \leqslant 4$ является устойчивым многочленом, при $N=5$ имеет два комплексно-сопряженных корня, при $N \geqslant 6$ является неустойчивым многочленом; при $N \geqslant 1$ все нули $\Psi_N(p,0)$ расположены в области: $N\mu<|\tau p|<N+4/3$, $Re(\tau p)<N$, где $\mu=0,288465$ — единственный положительный корень уравнения $xe^{x+1}=1$.

Результаты исследования и их обсуждение

Для решения поставленной задачи прогнозирования сигнала $g(t)$, как отмечалось выше, требуется реализовать передаточную функцию $\Psi(p)=e^{\tau p}$. Так как эта функция является бесконечномерной и трансцендентной, то осуществить непосредственно эту реализацию не получится. Другой способ реализации может быть связан с аппроксимацией функции $\Psi(p)=e^{\tau p}$ отрезком ряда Тейлора . Но и этот подход не позволяет решить задачу, так как разложение $e^{\tau p}$ по степеням p приводит к необходимости реализации идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией $W(p)=p$, что, как известно, неосуществимо [6]. Однако если рассмотреть разложение $\Psi(p)=e^{\tau p}$ в ряд Бурмана – Лагранжа по степеням дробно-рациональных выражений, то задача может быть решена.

Итак, рассмотрим аппроксимацию передаточной функции с помощью дробно-рациональных выражений. С этой целью будем использовать ряды Бурмана – Лагранжа — полезное для приложений обобщение рядов Тейлора. Ряды Бурмана – Лагранжа [4, 5] получаются при разложении одной аналитической функции $\Psi(p)$ по степеням другой аналитической функции $w(p)$:

$$\Psi(p)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n w^n(p)=\sum_{n=0}^{N}d_n w^n(p)+\Delta_N(p,a). \tag{11}$$

Формулы для коэффициентов ряда Бурмана – Лагранжа [4, 5] имеют следующий вид:

$$d_n=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)}{w^{n+1}(z)}\,dz=\frac{1}{n!}\lim_{p\to a}\frac{d^n}{dp^n}\left[\frac{\Psi(p)w'(p)(p-a)^{n+1}}{w^{n+1}(p)}\right],\ \ n\in Z_0. \tag{12}$$

При $n\geqslant 1$ формулы (12) можно представить следующим образом:

$$d_n=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi'(z)}{w^n(z)}\,dz=\frac{1}{n!}\lim_{p\to a}\frac{d^n}{dp^n}\left[\frac{\Psi'(p)(p-a)^n}{w^n(p)}\right],\ \ n\in Z_0. \tag{13}$$

Формулы (12) и (13) для коэффициентов ряда Бурмана – Лагранжа получены при предположении, что $\Psi(p)$ и $w(p)$ правильны в некоторой точке a, т. е. существуют и конечны пределы $\lim\limits_{p\to a}\Psi(p)$ и $\lim\limits_{p\to a}w(p)$, причем $w(p)$ имеет в точке a нуль первого порядка. Замкнутый контур C, ограничивающий некоторую область D, выбирается так, чтобы D содержала точку a, обе функции были правильны в $\bar{D}=D\cup C$ и чтобы $w(p)$ принимала свои значения лишь один раз. Отметим, что если $w(a)\neq 0$, то функцию $\Psi(p)$ можно раскладывать в ряд по степеням функции $w_1(p)=w(p)-a$.

Выражение для остаточного члена ряда Бурмана – Лагранжа имеет вид

$$\Delta_N(p,a)=\sum_{n=N+1}^{\infty}d_n w^n(p)=\frac{w^{N+1}(p)}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)\,dz}{w^{N+1}(z)(w(z)-w(p))}. \tag{14}$$

Нетрудно заметить, что при $w(p)=p-a$ формула для остаточного члена ряда Бурмана – Лагранжа (14) совпадает с формулой для остаточного члена ряда Тейлора (4), выражение для коэффициентов (12) совпадает с (6), а разложение (11) представляет собой ряд Тейлора для функции $\Psi(p)$. Таким образом, ряд Бурмана – Лагранжа является обобщением ряда Тейлора.

Рассмотрим далее разложение функции $\Psi(p)=e^{\tau p}$ по степеням $w(p)=\frac{p}{\mu p+1}$, $\mu\geqslant 0$, при $a=0$. Тогда

$$e^{\tau p}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\frac{p^k}{(\mu p+1)^k}. \tag{15}$$

Имеем $\alpha_0=\Psi(0)=1$. По формуле (13), применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, после элементарных преобразований получаем

$$\alpha_k=\frac{\tau^k}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^i A_k^i\left(\frac{\mu}{\tau}\right)^i,\ k\geq 1, \tag{16}$$

где $C_{k-1}^i=\frac{(k-1)!}{i!\,(k-i-1)!}$, $A_k^i=\frac{k!}{(k-i)!}$. Нетрудно проверить, что при $\mu=0$ коэффициенты рядов Тейлора и Бурмана – Лагранжа совпадают. При $\mu>0$ получаем реализуемое разложение $\Psi(p)=e^{\tau p}$ по степеням

$w(p)=\frac{p}{\mu p+1}$. В этом случае μ можно рассматривать как параметр регуляризации, применяемый для решения некорректных задач [7].

Построение автоматического прогнозатора

С помощью ряда (15) найдем передаточную функцию автоматического прогнозатора. С этой целью представим разложение (15) в следующем виде:

$$e^{\Psi}=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\frac{p^k}{(\mu p+1)^k}+\Delta_N(p), \tag{17}$$

где $\Delta_N(p)$ — остаточный член ряда Бурмана – Лагранжа при $w(p)=\frac{p}{\mu p+1}$, $\mu\geqslant 0$ и $a=0$ функции e^{Ψ}. Можно показать, что в любом круге $|p|\leqslant R$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N(p)=0. \tag{18}$$

Поэтому передаточную функцию прогнозатора рассмотрим в виде

$$W_N(p)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\frac{p^k}{(\mu p+1)^k}. \tag{19}$$

В силу (18) при $N\to\infty$ имеем $W_N(p)\to e^{\Psi}$ для всех $|p|\leqslant R$, то есть точность прогноза будет повышаться с увеличением числа членов ряда Бурмана – Лагранжа.

На рис.1–4 представлены результаты моделирования прогнозатора (19) при $\mu = 0{,}01$ и $N = 3$.

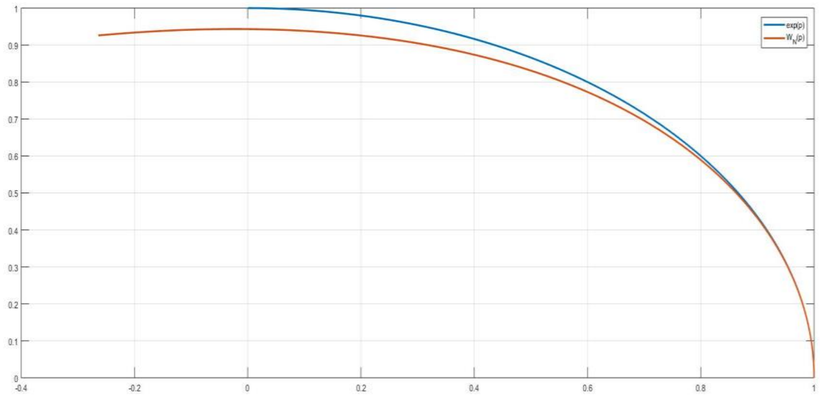

Рис. 1. Амплитудная фазо-частотная характеристика прогнозатора
Fig. 1. Amplitude phase-frequency response of the predictor

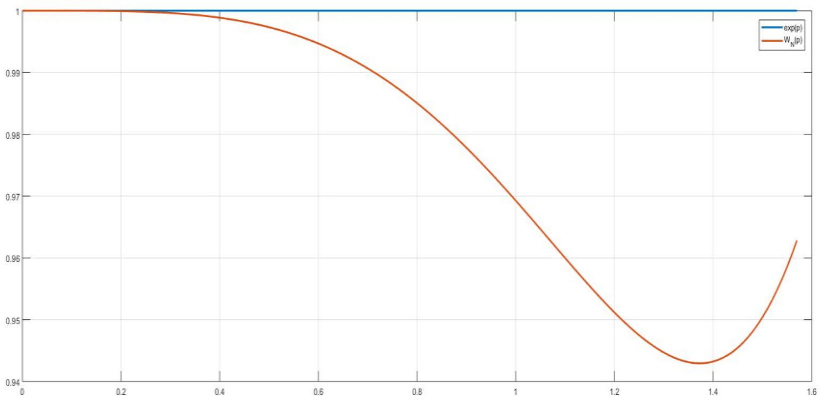

Рис.2. Амплитудно-частотная характеристика прогнозатора
Fig. 2. Amplitude-frequency response of the predictor

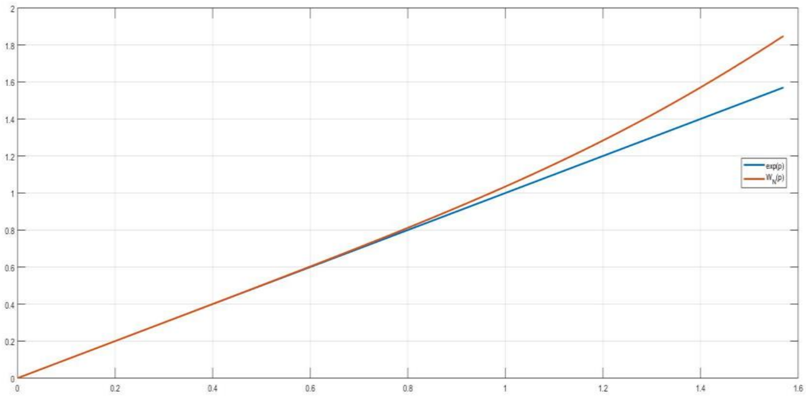

Рис. 3. Фазо-частотная характеристика прогнозатора
Fig. 3. Phase-frequency response of the predictor

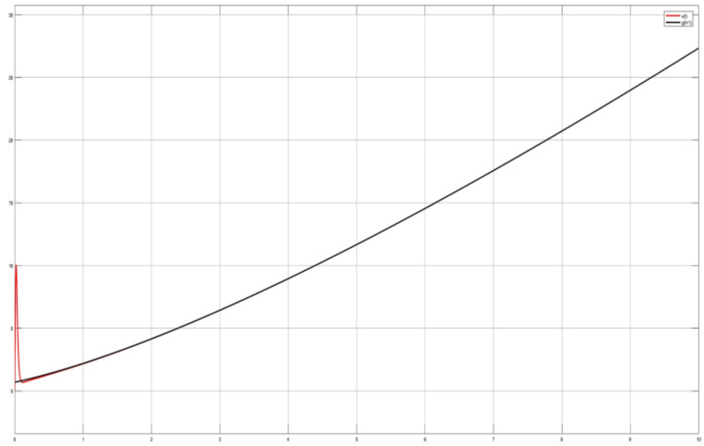

Рис. 4. Результат прогноза сигнала $t\ln(t+1)$
Fig. 4. Signal prediction result $t\ln(t+1)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье решалась задача автоматического прогнозирование класса бесконечно-дифференцируемых детерминированных сигналов. Такие задачи возникают как в теории автоматического управления, так и в различных приложениях, где требуется получить прогноз по наблюдаемой реализации. Для решения поставленной задачи использовалось разложение экспоненциальной передаточной функции в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням передаточной функции реализуемого устойчивого дифференцирующего звена. Следует особо отметить, что разложение в ряд Бурмана-Лагранжа позволяет осуществить регуляризацию некорректной задачи. Точность прогнозирования может быть увеличена за счет параметра регуляризации, а также за счет увеличения числа членов ряда Бурмана-Лагранжа. Результаты моделирования построенного в статье автоматического прогнозатора показывают хорошую точность прогнозирования. Предложенный метод синтеза автоматических прогнозаторов может быть применен для других классов сигналов, в том числе для прогнозирования зашумленных сигналов.

Список литературы

1. Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды / Г.И. Марчук. – Л.: Гидрометеоиздат, 1967. – 355 с.
2. Ивахненко А.Г. Кибернетические предсказывающие устройства / А.Г. Ивахненко, В. Г. Лапа. – К.: «Наукова думка», 1965. – 213 с.
3. Бейкер Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. – 502 с.

4. Девятов Б.Н. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление / Б.Н. Девятов, Н.Д. Демиденко, В.А. Охорзин. – Красноярск : Красноярское книжное изд-во, 1976. – 312 с.

5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

6. Лозгачев Г.И. Автоматические дифференциаторы: построение и применение в задачах управления / Г.И. Лозгачев, А.В. Дылевский. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2000. – 144 с.

7. Тихонов А.Н. Методы решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 223 с.

References

1. Marchuk G.I. Numerical methods in the weather forecast / G.I. Marchuk. – L.: Hydrometeoisdat, 1967. – 355 p.

2. Ivakhnenko A.G. Cybernetic predictive devices / A.G. Ivakhnenko, V.G. Lapa. – K.: "Naukova Dumka", 1965. – 213 p.

3. Baker J. Approximations of Pade / J. Baker, P. Graves-Morris. – M.: World, 1986. – 502 p.

4. Devyatov B.N. Dynamics of distributed processes in technological apparatuses, distributed control and control / B.N. Devyatov, N.D. Demidenko, V.A. Okhorzin. – Krasnoyarsk: Krasnoyarsk Book Publishing House, 1976. – 312 p.

5. Lavrentiev M A. Methods of the theory of functions of a complex variable / M.A. Lavrentiev, B.V. Shabat. – M.: Science, 1987. – 688 p.

6. Lozgachev G.I. Automatic differentiators: construction and application in control tasks / G.I. Lozgachev, A.V. Dylevsky. – Voronezh: Publishing House of VSU, 2000. – 144 p.

7. Tikhonov A.N. Methods for solving incorrectly set tasks / A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin. – M.: Science, 1974. – 223 p.

Дылевский Александр Вячеславович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий в экономике Воронежского филиала Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова
Хрипушин Денис Александрович, аспирант факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета

Dylevsky Alexander Vyacheslavovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Information Technologies in Economics, Voronezh branch of the Russian University of Economics named after G.V. Plekhanov
Khripushin Denis Alexandrovich, postgraduate student at Faculty of Computer Sciences, Voronezh State University