УДК: 37.01 **DOI: 10.18413/2408-932X-2026-12-1-0-9**

Ерыгина Н. С. [1], **Пеньков В. Е.** [2]

Герменевтические основания решения уравнений и их систем

[1]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия; *erygina_n@bsuedu.ru*
[2]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия;
penkov@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы, связанные с умением школьников решать уравнения различного вида. Главная идея состоит в том, что необходимо не просто запомнить алгоритмы и правила решения уравнений, а понимать, откуда они появляются. На этой основе авторами выделяются три герменевтических принципа. Во-первых, если с равными частями уравнения провести одинаковые действия, равенство сохранится. Во-вторых, при решении неравенств при делении или умножении обоих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный. В-третьих, при решении нерациональных уравнений и их систем исходные уравнения необходимо привести к элементарному уравнению или к виду, в котором будет присутствовать только одна функция, которую путем замены переменной можно будет привести к рациональному уравнению, а после его решения путем обратной замены получить элементарное уравнение, которое решается простейшим образом. Знание этих правил позволит школьникам решать любые уравнения от самых элементарных до самых сложных на всем протяжении изучения математики, с первого по одиннадцатый класс.

Ключевые слова: обучение; педагогическая герменевтика; математика; решение уравнений; системы уравнений

Для цитирования: Ерыгина, Н. С. и Пеньков, В. Е. (2026), «Герменевтические основания решения уравнений и их систем», *Научный результат. Социальные и гуманитарные исследования*, 12(1), 110-120, DOI: 10.18413/2408-932X-2026-12-1-0-9

N. S. Erygina [1], **V. E. Penkov** [2]

Hermeneutic Foundations for Solving Equations and Their Systems

[1]Belgorod State National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia;
erygina_n@bsuedu.ru
[2]Belgorod State National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia;
penkov@bsuedu.ru

Abstract. This article addresses issues related to schoolchildren's ability to solve different types of equations. It emphasises the importance of understanding the origins of algorithms and rules for solving equations, rather than merely memorising them. With this in mind, the authors identify three hermeneutic principles. Firstly, performing the same operation on both sides of an equation maintains the equality. Secondly, when dividing or multiplying both parts of an inequality by a negative number, the inequality sign must be reversed. Thirdly, when solving non-rational equations and their systems, the original equations must be reduced to an elementary equation or a form with only one function, which can be reduced to a rational equation by replacing the variable. After solving this equation by inverse replacement, an elementary equation is obtained that can be solved in the simplest way. By knowing these rules, students will be able to solve any equation, from the most basic to the most complex, throughout their mathematics studies, from the first to the eleventh grade.

Keywords: teaching; pedagogical hermeneutics; mathematics; solving equations; systems of equations

For citation: Erygina, N. S. and Penkov, V. E. (2026), "Hermeneutic Foundations for Solving Equations and Their Systems", *Research Result. Social Studies and Humanities*, 12(1), 110-120, DOI: 10.18413/2408-932X-2026-12-1-0-9

Математика является одной из самых сложных наук как с точки зрения изучения, так и с точки зрения обучения. Так, например, теоретический материал, необходимый для успешной сдачи единого государственного экзамена, занимает 60 страниц (Математика. Подготовка…, 2024: 289-348). Возникают закономерные вопросы: можно ли такой большой объем информации удержать в голове и как понять при решении конкретной задачи, каким из этих знаний надо воспользоваться?

Единственный выход из этого положения – объединить весь этот материал в группы, выявить общие закономерности или принципы, на основе которых выводится все остальное. При этом число этих принципов должно быть невелико и они должны быть понятны любому школьнику, чтобы он их не просто заучил, а логически осмыслил и умел применять в конкретных ситуациях.

И вот здесь на помощь приходит так называемый герменевтический подход, который «для обучающегося нередко имеет скорее инструментальный, чем методологический смысл, проявляясь в виде пути от знания – к познанию, а от познания – к творчеству. Для обучающего же учителя, преподавателя герменевтика представляет собой методологическую основу создания нового образовательного пространства, в котором обучающий обеспечивает условия осуществления "многогранного диалога"» (Ермак, 2016: 220). Другими словами, учитель должен таким образом построить процесс обучения математике, чтобы за формулами, правилами, аксиомами, теоремами обучающийся видел практический смысл и пропускал всю информацию через свое сознание.

О.П. Мокиенко в своей работе идет еще дальше. Согласно его определению, под герменевтическим подходом понимается «обучение школьников через создание личностно ориентированных эмоционально-образных ситуаций посредством воссоздаваемых образов-символов» (Мокиенко, 2011: 205). Здесь задействуется не только интеллектуальная, но и эмоциональная сфера человека. Можно привести много высказываний на эту тему, но в данной работе хочется остановиться на коллективной монографии О.А. Сотниковой, Е.Ф. Фефиловой и Н.И. Гоза (Сотникова, Фефилова и Гоза, 2008), в которой собран весь материал, относящийся к математическому пониманию.

Остановимся на ключевых моментах данного исследования. Авторы монографии подчеркивают: «Применительно к математике можно говорить о двух видах понимания:

рациональное (понимание-объяснение) и герменевтическое (понимание-истолкование)» (Сотникова, Фефилова и Гоза, 2008: 16). При этом объяснение связывается с рациональным обоснованием, при котором четко вырисовывается структура и взаимосвязи между отдельными элементами информации. Истолкование же предполагает интерпретацию уже этих связей, так сказать, понимание на уровне второго порядка. Это уже осмысление знания уровня первого порядка, когда ученик не только понимает, как взаимосвязаны те или иные факты, но и осмысливает, почему это происходит.

В результате получается два вида знания: фактологическое и идейное. При этом «фактологическое знание склонно к “выветриванию”, забыванию. Идейное знание стационарно и мобильно, но оно не существует “само по себе”, оно “материализуется” на фактологическом знании» (Сотникова, Фефилова и Гоза, 2008: 21). Другими словами, чтобы знание было полноценным, оно должно формироваться из идей субъекта. Идеи же обучающего вытекают из его сознания, то есть являются внутренними по отношению к нему. Такое знание невозможно забыть. И когда эти идейные знания переносятся на внешнее – фактологическое знание – субъект понимает, а не запоминает, почему имеет место то или иное правило, теорема, формула. В конце концов появляется целостное восприятие математики на основе установления «содержательных взаимосвязей в материале, тех, которые способствуют единению знаний» (Там же: 28). Данный тезис говорит о том, что при более глубоком изучении материала необходимо показывать, что частные случаи, которые изучаются в начальной школе, могут вытекать из более общих закономерностей. И увидеть эту целостность можно, только рассмотрев проблему на разном уровне сложности и в разных аспектах. Только после этого можно выявить какой-то единый принцип, из которого будут следовать все эти правила. Конечно, ученику это не под силу – он не владеет полным знанием. Но учитель может выявить этот принцип и дать ученику информацию, как именно из него вытекает то или иное правило. А уже в среднем и старшем звене показывать, как этот же принцип работает в более сложных ситуациях. И тогда вместо 60 страниц теоретического материала обучающемуся достаточно осмыслить 10-15 основных принципов, на основании которых строится вся школьная математика.

Подчеркнем, что рассматриваемая монография носит теоретический характер, что нашло отражение в ее названии. Очень полезным будет рассмотреть эти же вопросы в прикладном аспекте, показать, как данная теоретическая модель работает на практике.

И сделаем мы это на примере решения уравнений и их систем, которое является одним из важнейших умений практически для каждого человека. По сути, решение любой математической задачи (исключая чисто вычислительные) сводится к решению того или иного уравнения. Даже в повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с такой необходимостью. При моделировании естественнонаучных процессов ученые постоянно должны не только решать, но и уметь составлять уравнения (или их системы) на основе экспериментальных данных. При решении учебных задач по физике, химии, биологии школьники также сталкиваются с такой необходимостью. Поэтому не случайно Ю.В. Мушенок отмечает: «В современном мире понятие уравнения в школьной математике является неотъемлемой частью обучения. Большинство задач в математике сводятся к решению и применению различных видов уравнений. Уравнения позволяют моделировать явления из окружающего мира и являются важной частью математического образования. Тем не менее умение решать уравнения представляет собой значительную сложность для школьников» (Мушенок, 2025: 62).

Это связано с тем, что в курсе математики средней школы нет единого методологического подхода к решению уравнений, отсутствуют единые герменевтические основания, на основе которых можно решить любое уравнение: уравнения каждого вида решаются с использованием конкретных методов, применимых только для данного вида уравнений, причем эти методы воспринимаются учениками как совершенно независимые друг от друга.

Проанализировав ряд решений на сайте для подготовки к экзаменам, М.К. Лапицкий и Е.В. Дугинов приходят к выводу: «Из представленных примеров складывается общее мнение о том, что обычный одиннадцатиклассник не поймет, почему представлено именно такое решение, откуда появляются те или иные формулы. Основной вопрос будет связан с тем, как и почему они видоизменяются, ведь в понимании и есть ключ к знаниям и их усвоению. Простое механическое заучивание позволяет решить одну задачу, но данное знание не является универсальным, стоит изменить условие, формулировку или контекст и прийти к правильному решению станет многократно труднее» (Лапицкий и Дугинов, 2025: 226).

Подобная ситуация наблюдается не только при решении задач, но и при объяснении теоретического материала, когда ученики просто заучивают правило, но не понимают, откуда оно появляется. Причем это происходит в течение всего обучения.

Выучить правила.

x + 5 = 12 **слагаемое слагаемое сумма** **Чтобы найти неизвестное первое слагаемое, надо из суммы вычесть второе слагаемое.** **X + 5 = 12** **X = 12 – 5** **X = 7** **7 + 5 =12** **12 = 12**	**7 + x = 12** **слагаемое слагаемое сумма** **Чтобы найти неизвестное второе слагаемое, надо из суммы вычесть первое слагаемое.** **7 + X = 12** **X = 12 – 7** **X = 5** **7 + 5 = 12** **12 =12**
У - 10 = 3 **Уменьшаемое вычитаемое разность** **Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое** **У – 10 = 3** **У = 3 + 10** **У = 13** **13 – 10 = 3** **3 = 3**	**13 - у = 3** **Уменьшаемое вычитаемое разность** **Чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо из уменьшаемого вычесть разность** **13 – у = 3** **У = 13 – 3** **У = 10** **13 – 10 = 3** **3 = 3**
x * 5 = 15 **множитель множитель произведение** **Чтобы найти неизвестный первый множитель, надо произведение разделить на второй множитель.** **X * 5 = 15** **X = 15 : 5** **X = 3** **3 * 5 =15** **15 = 15**	**3 * x = 15** **множитель множитель произведение** **Чтобы найти неизвестный второй множитель, надо произведение разделить на первый множитель.** **3 * X = 15** **X = 15 : 3** **X = 5** **3 * 5 = 15** **15 =15**
У : 7 = 3 **делимое делитель частное** **Чтобы найти неизвестное делимое, надо частное умножить на делитель** **У : 7 = 3** **У = 3 * 7** **У = 21** **21 : 7 = 3** **3 = 3**	**21 : у = 3** **делимое делитель частное** **Чтобы найти неизвестный делитель, надо делимое разделить на частное** **21 : у = 3** **У = 21 : 3** **У = 7** **21 : 7 = 3** **3 = 3**

Рис. Скриншот с сайта «Образовательная социальная сеть nsportal.ru»
Fig. Screenshot from the website “Educational social network nsportal.ru”

Рассмотрим конкретные примеры из школьного курса математики на примере решения уравнений и их систем.

Все помнят правила нахождения компонентов уравнения, изучаемые в начальной школе (рисунок) (Филиппова, 2025).

От ученика требуется выучить 8 правил, но их закономерность их появления и объяснение отсутствуют.

В средней школе после изучения отрицательных чисел появляется девятое правило: при переносе слагаемого из одной части в другую перед ним меняется знак. Собственно, это видно на примерах 1-4 на рис. 1. Но опять же не обосновывается, почему так происходит.

Тем не менее все эти 9 правил следуют из одного-единственного принципа: если с равными частями уравнения провести одинаковые действия, равенство сохранится. Сам этот принцип настолько очевиден, что не требует дополнительного обоснования. Говоря словами авторов вышеупомянутой монографии, вместо девяти фактов, которые необходимо запомнить на уровне фактологического знания, необходимо осмыслить один принцип на уровне идейного знания.

Проиллюстрируем, как он работает.

Нахождение неизвестного слагаемого: $x + 5 = 12$. Надо найти «чистый» x. Понятно, что нам мешает число 5. Если мы отнимем это число от левой части, мы получим только x. Но, чтобы равенство не нарушилось, то же самое мы должны проделать и с правой частью. В итоге будем иметь: $x + 5 – 5 = 12 – 5$. Проводя вычисления, получим х = 12 – 5. Число 5 перенесли из левой части в правую и изменили перед ним знак с плюса на минус (правило 9). В итоге: $x = 7$. При этом не важно, первым или вторым слагаемым является неизвестное x.

При нахождении уменьшаемого $y – 10 = 3$ поступаем аналогично, выделяя «чистый» y. Только здесь надо прибавлять. В итоге будем иметь следующую цепочку равенств: $y – 10 + 10 = 3 + 10$; $y = 3 + 10$ (правило 9). В итоге $y = 13$.

При нахождении вычитаемого задача немного усложняется, но опять же работает тот же принцип. $13 – y = 3$. Здесь неизвестное стоит со знаком «минус». Для ребенка, который проделал предыдущие примеры, это уже будет проблемная ситуация, но вполне решаемая. Если мы прибавим y к обеим частям уравнения, получим $13 – y + y = 3 + y$. Или $13 = 3 + y$. Получаем неизвестное слагаемое, как в примере 1. То, что неизвестное стоит в правой части, суть дела не меняет: $13 – 3 = 3 – 3 + y$; $10 = y$. Отсюда очевидно, что $y = 10$.

Теперь рассмотрим примеры с умножением и делением.

Нахождение неизвестного множителя: $x \cdot 5 =15$. Чтобы получить «чистый» x, необходимо избавиться от числа 5. Разделим обе части на 5: $x \cdot 5 : 5 = 15 : 5$. Проводя вычисления, получим $x = 3$. При этом не играет роли, первым или вторым множителем является x.

При нахождении делимого $y : 7 = 3$ поступаем аналогично, выделяя «чистый» y. Только здесь надо умножать. В итоге будем иметь: $y : 7 \cdot 7 = 3 \cdot 7$; $y = 21$.

После изучения дробей применение данного принципа становится еще и наглядным.

Проиллюстрируем это на примере нахождения делителя: $\frac{21}{y} = 3$. Умножаем обе части уравнения на y, получим: $21 = 3y$. Теперь разделим обе части уравнения на 3 и поменяем местами: $\frac{3y}{3} = \frac{21}{3}$. Дробь, стоящую в левой части, сократим на 3. В итоге, $y = 7$.

Во всех приведенных примерах ученик понимает, что именно и зачем надо делать. Цель – путем арифметических действий получить в одной части уравнения только неизвестное, а в другой части – только число. И не надо запоминать 9 правил, достаточно понять, как работает один принцип. И тогда в каждом конкретном примере правила нахождения компонентов будут проявляться сами собой. Конечно, расписывать все подробно, как описано в вышеприведенных примерах, нет смысла, и любое из 9 правил можно и нужно использовать, но надо понимать, откуда они появляются, и видеть суть производимых операций.

При изучении буквенных рациональных выражений учеников учат упрощать выражения, выражать одну переменную через другую, что при решении уравнений приходится делать достаточно часто. При этом появляются еще 2 новых правила. Для основного свойства пропорции: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних (мнемоническое правило при записи дробями: крест на крест). Математически это выглядит так: если $a{:}b = c{:}d$ или в виде дробей $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$ (правило 10). Для деления дробей: чтобы разделить одну дробь на другую, необходимо первую дробь умножить на дробь, обратную второй дроби. $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b}$ (правило 11).

Однако, и эти два правила также вытекают из вышеприведенного принципа.

Рассмотрим, как данный принцип работает при объяснении основного свойства пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Чтобы избавиться от знаменателя, левую часть надо умножить на b, а правую – на d. Поскольку это уже не начальная школа, а среднее звено, можно это сделать сразу, умножив обе части на произведение bd: $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$. В левой части можно сократить на b, а в правой – на d. В итоге получим $ad = bc$, что полностью соответствует основному свойству пропорции.

А теперь покажем, как данный принцип работает при делении дробей. $\frac{a}{\frac{b}{c}} = x$. Умножим на $\frac{b}{c}$, получим: $\frac{a \cdot \frac{b}{c}}{\frac{b}{c}} = x\,\frac{b}{c}$; $a = x\,\frac{b}{c}$. Умножим на c. $ac = xb$, разделим на b. Будем иметь: $\frac{ac}{b} = x$. Или $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}$ (правило 11).

Таким образом, для нахождения неизвестной величины в уравнении вместо бездумного выучивания 11 правил достаточно понять, как работает один-единственный принцип. Мы не призываем полностью отказаться от рассмотренных правил и каждый раз проводить вышеприведенные действия, поскольку знание правил позволяет сократить путь и ускорить время решения. Речь идет о том, чтобы ученики понимали, откуда эти правила берутся.

Теперь рассмотрим решение систем уравнений.

На сайте «Фоксфорда» (Разбираемся в решении линейных уравнений, 2025) приводится 5 методов решения системы рациональных уравнений: метод подстановки, метод почленного сложения или вычитания, метод Крамера, метод обратной матрицы и метод Гаусса. При этом суммарно имеется 16 пунктов, которые описывают алгоритмы решения различными методами.

Используя вышеописанный принцип, можно решить любую систему уравнений. Самый распространенный метод подстановки заключается в том, что из одного уравнения выражают одну переменную через другую, это выражение подставляют во второе уравнение, которое получается с одним неизвестным. Далее каждое уравнение решается отдельно, в результате чего решение сводится к вышеописанным приемам.

Метод почленного сложения или вычитания работает также с использованием вышеописанного принципа.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть дана система уравнений: $\begin{cases} 4x - 3y = 20 \\ 5x + y = 44 \end{cases}$. Умножим второе уравнение на 3, чтобы коэффициент при неизвестной y был по модулю такой же, как в первом уравнении: $\begin{cases} 4x - 3y = 20 \\ 15x + 3y = 132 \end{cases}$. Теперь прибавим к левой части первого уравнения левую часть второго уравнения. К правой части первого уравнения прибавляем правую часть второго уравнения, которая равна его левой части. Опять работает тот же принцип. В итоге получим уравнение $19x = 152$. Откуда получаем: $x = 8$. Теперь подставим это значение в любое из уравнений системы, допустим, в первое: $4 \cdot 8 - 3y = 20$. Остается выразить y. В итоге имеем: $-3y = -12$; $y = 4$. Таким образом, решением системы уравнений является пара чисел $x = 8$ и $y = 4$.

Теперь рассмотрим решение неравенств.

В учебнике 8 класса по алгебре приводятся 6 теорем и два следствия, которые необходимо знать для решения рациональных неравенств, то есть еще 8 единиц информации. Однако и здесь можно использовать тот же принцип, но несколько модернизированный: если между частями неравенства существует некоторое соответствие, то при совершении одинаковых действий с его обеими частями это соответствие сохраняется. Здесь, однако, есть одно исключение: при умножении (или делении, которое можно рассматривать как умножение, исходя из правила 11) на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный. Его обоснование также надо дать ребенку, исходя из следующего: из отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше, то есть чем дальше оно от начала координат на координатной оси. Но положительные числа идут вправо от нуля, а отрицательные влево, изменение направления соответствует изменению знака. Для понимания приведем наглядную иллюстрацию: $1 < 7$, но $-1 > -7$.

Из этого появляется дополнительное условие, о котором часто забывают, если при решении неравенства необходимо произвести умножение (или деление) на неизвестное (неравное нулю), необходимо рассмотреть два случая: когда оно меньше нуля, тогда знак неравенства надо изменить на противоположный; когда оно больше нуля, тогда знак неравенства не изменяется. И при получении ответа в первом случае необходимо исключить положительные корни, а во втором – отрицательные.

Рассмотрим конкретный простейший пример: необходимо решить неравенство: $3x > 2x$. На первый взгляд кажется, что это верно для любого x, поскольку, разделив на x, мы получаем истинное выражение $3 > 2$. Но это верно только для положительных x. Если $x = 0$, то получится тривиальное тождество $0 = 0$, а при $x < 0$ знак неравенства необходимо изменить, в результате получим ложное высказывание: $-3 > -2$. То есть решением неравенства будет промежуток $x \in (0;\ +\infty)$. При решении любых неравенств надо помнить, что при умножении (или делении) на отрицательное число надо менять знак.

Таким образом, вместо 40 единиц информации (правил и алгоритмов) можно использовать один принцип с одним дополнением, то есть всего 2 единицы информации. Следовательно, информационная емкость, необходимая для умения решать рациональные уравнения, неравенства и их системы уменьшается в 20 раз. Кроме того, у учеников появляется понимание того, как этот принцип работает в самых разных случаях.

Тем не менее, как показывает практика, об этом принципе не знают даже выпускники средней школы. Так, при опросе студентов первого курса факультета математики и естественнонаучного образования НИУ «БелГУ» в количестве 73 человек только 2 из них показали знание этого принципа.

Данная проблема возникает по той причине, что в школьной программе изучаются конкретные правила для решения конкретных уравнений, то есть используется индуктивный подход без необходимого обобщения. И очень немногие к окончанию школы могут это обобщение сделать самостоятельно. А в школьной программе этот материал просто отсутствует.

Для решения этой проблемы необходимо уже в начальной школе рассказать о рассмотренном выше принципе и показывать, как из него вытекают частные случаи при дальнейшем изучении математики в среднем звене. Это будет способствовать формированию математической грамотности и целостного представления о математике как науке.

В заключение остановимся на решении нерациональных уравнений и неравенств различного типа, которые изучаются в старших классах средней школы. Здесь суть сводится к одному: исходное выражение необходимо привести к элементарному уравнению (неравенству) или виду, в котором будет присутствовать только одна функция, которую путем замены переменной можно будет привести к рациональному уравнению, а после его решения путем обратной замены получить элементарное уравнение, которое решается простейшим образом. При этом необходимо знать дополнительную информацию о свойствах тех функций, которые входят в уравнения или неравенства и опять же использовать вышеописанный принцип (Приложение 1).

При решении нерациональных уравнений и неравенств различных видов основная идея сводится к тому, что необходимо исходное уравнение или неравенство преобразовать таким образом, чтобы в выражении присутствовала только одна функция, а затем на основании свойств этой функции найти решение.

При традиционном подходе учащиеся каждый вид уравнения воспринимают как совершенно новый блок информации, не видят общих подходов, не осмысливают целостности математического знания.

Обобщая все вышеизложенное, можно сделать вывод, что герменевтическими основаниями решения любых уравнений и их систем являются три блока информации.

1. Если с равными частями уравнения провести одинаковые действия, равенство сохранится.

2. При решении неравенств при делении или умножении обоих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный.

3. При решении нерациональных уравнений и их систем исходные уравнения необходимо привести к элементарному уравнению или к виду, в котором будет присутствовать только одна функция, которую путем замены переменной можно будет привести к рациональному уравнению, а после его решения путем обратной замены получить элементарное уравнение, которое решается простейшим образом.

Знание этих правил позволит школьникам решать любые уравнения от самых элементарных до самых сложных на протяжении изучения математики с первого по одиннадцатый класс.

Приложение 1
Appendix 1

Рассмотрим решение ***неравенства*** из задачника для поступления во ВТУЗы № 7.165. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$ (Сканави, 2013). Основная задача состоит в том, чтобы получить одну функцию (в данном случае выражение с одинаковыми основаниями и показателями). В первую очередь, используя свойство степеней, приведем все показатели к значению x.

$$9^{x+2} = 9^x \cdot 9^2 = 81 \cdot 9^x;$$
$$4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4 \cdot 4^x;$$
$$9^{x+1} = 9^x \cdot 9^1 = 9 \cdot 9^x.$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 9^x = 6 \cdot 4 \cdot 4^x - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9^x.$$
$$3 \cdot 4^x + 27 \cdot 9^x = 24 \cdot 4^x - \frac{9}{2} \cdot 9^x.$$

Следующий шаг сводится к тому, чтобы привести все степени одинаковому основанию. Можно 4 возвести в какую-то степень, чтобы получить 9, но это будет иррациальное число. Гораздо легче перенести подобные слагаемые в разные стороны и привести подобные слагаемые

$$\frac{9}{2} \cdot 9^x + 27 \cdot 9^x = 24 \cdot 4^x - 3 \cdot 4^x;$$
$$\frac{63}{2} \cdot 9^x = 21 \cdot 4^x;$$

Сокращаем на 21

$$\frac{3}{2} \cdot 9^x = 4^x$$

Поскольку для любого x выражение 9^x всегда положительно и не равно нулю, можно на него разделить

$$\frac{3}{2} = \frac{4^x}{9^x} = \left(\frac{4}{9}\right)^x$$

Легко заметить, что $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Значит нам надо «перевернуть» дробь. По свойству показательной функции, это можно сделать, поменяв знак показателя степени:

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-x}$$

Возведем в квадрат

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^1 = \left(\frac{9}{4}\right)^{-2x}$$

Теперь необходимо учесть, что функция $y = \left(\frac{9}{4}\right)^x$ является монотонной, и единственному значению функции соответствует единственное значение аргумента. Значит, можно приравнять показатели степеней и получить рациональное уравнение $1 = -2x$, откуда $x = -0{,}5$. Это и будет решением уравнения.

В данном случае даже не пришлось делать замену переменной, изначально достаточно сложное уравнение удалось свести к элементарному.

Далее рассмотрим пример решения ***тригонометрического уравнения*** 8.038 $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$ из того же сборника (Сканави, 2013): Действуем по тому же принципу. В данном случае в первую очередь надо привести все значения к аргументу x, то есть избавиться от косинуса двойного угла. Из трёх возможных формул выбираем ту, в которой присутствует синус одинарного угла. $1 - 2 \cdot \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$. Приведем подобные слагаемые и умножим на -1, получим: $2 \cdot \sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$. В итоге мы получили квадратное уравнение относительно функции $y = \sin x$. Для удобства сделаем замену $2y^2 + 5y + 2 = 0$. При этом необходимо учесть область значений синуса: $-1 < y < 1$. Решая квадратное уравнение, получим, два корня $y_1 = -2$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$. Первый корень не входит в область значений синуса, и остается единственный случай: $\sin x = -\frac{1}{2}$. Это простейшее тригонометричекое уравнение, решение которого находится по следующей формуле: $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где n – целое число.

Завершая серию примеров, рассмотрим решение ***логарифмического неравенства*** № 9.135 $\log_{0,5}(x + 3) < \log_{0,25}(x + 15)$ (Сканави, 2013). Опять тот же подход: исходное уравнение необходимо привести к виду, в котором будет присутствовать только одна функция и воспользоваться ее свойствами. В данном случае необходимо привести логарифмы к одному основанию. Применим формулу перевода к другому основанию логарифма, будем иметь:

$\log_{0,25}(x+15) = \frac{\log_{0,5}(x+15)}{\log_{0,5} 0,25} = \frac{\log_{0,5}(x+15)}{2}$. После умножения на 2 исходное неравенство примет следующий вид: $2 \cdot \log_{0,5}(x+3) < \log_{0,5}(x+15)$. По свойству логарифма можно записать $\log_{0,5}(x+3)^2 < \log_{0,5}(x+15)$. Мы получили неравенство относительно функции $y = \log_{0,5} x$. Эта функция является убывающей, поэтому большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента, то есть $(x+3)^2 > x+15$. После элементарных преобразований получим квадратное неравенство $x^2 + 5x - 6 > 0$. Решением этого неравенства будет объединение промежутков $x \in (-\infty;\ -6) \cup (1;\ +\infty)$. Теперь необходимо проверить, какие значения из этих промежутков входят в область определения начального неравенства. Под знаком логарифма должно быть положительное число, то есть $x + 3 > 0$, откуда следует, что $x > -3$. При этом $x + 15$ и подавно будет положительной величиной. Поэтому решением исходного уравнения является промежуток $x \in \cup\ (1;\ +\infty)$.

Литература

Ермак, Е. А. (2016), «Поиск новых возможностей реализации герменевтического подхода в обучении математике», *Человек как субъект социально-педагогического взаимодействия: Материалы Международной научно-методической конференции, посвященной памяти профессора Л.М. Лузиной, Псков, 18–19 декабря 2015 года*, Изд-во Псковского государственного университета, Псков, 217-224.

Лапицкий, М. К. и Дугинов, Е. В. (2025), «Методика решения задач на законы сохранения», *Педагогическая инноватика и непрерывное образование в XXI веке: Сб. науч. трудов III Международной научно-практической конференции, Киров, 14 мая 2025 года*, Вятский государственный агротехнологический университет, Киров, 222-226.

Математика. Подготовка к ЕГЭ–2025. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2025 года: Учебно-методическое пособие (2024), под ред. Лысенко, Ф. Ф. и Кулабухова, С. В., Легион, Ростов-на-Дону.

Мокиенко, О. П. (2011), «Герменевтический подход в обучении», *Вектор науки ТГУ. Серия: Педагогика, психология*, 3(6), 204-206. EDN: OCQCNH

Мушенок, Ю. В. (2025), «Ошибки при решении уравнений и их преодоление», *Вестник научных конференций*, 8-2(120), 62-64. EDN: JUEFWV

Разбираемся в решении линейных уравнений (2025) [Эл. ресурс], URL: https://externat.foxford.ru/polezno-znat/wiki-algebra-metody-resheniya-sistem-linejnyh-uravnenij?ysclid=mev9ie05ki599025509 (дата обращения: 02.12.2025).

Сканави, М. И. (2013), *Сборник задач по математике для поступающих во втузы*, 6-е изд., ОНИКС-ЛИТ; Мир и Образование, Москва.

Сотникова, О. А., Фефилова, Е. Ф. и Гоза, Н. И. (2008), *Герменевтический подход к обучению математике (теоретический аспект): Монография*, КРАГСиУ, Сыктывкар.

Филиппова, М. А. «Правила на заучивание названий компонентов при решении уравнений», *Образовательная социальная сеть nsportal.ru* [Эл. ресурс], URL: https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/matematika/2023/09/06/pravila-na-zauchivani e-nazvaniy-komponentov-pri-reshenii (дата обращения: 02.12.2025).

References

Ermak, E. A. (2016) “Search for New Opportunities for Implementing the Hermeneutic Approach in Teaching Mathematics”, *Chelovek kak subyekt sotsialno-pedagogicheskogo vzaimodeystviya: Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati professora L.M. Luzinoy, Pskov, 18-19 dekabrya 2015 goda* [Man as a Subject of Social and Pedagogical Interaction: Proceedings of the International Scientific and Methodological Conference Dedicated to the Memory of Professor L. M. Luzina, Pskov, December 18-19, 2015], Pskov State University Publishing House, Pskov, Russia, 217-224 (in Russ).

Filippova, M. A. (2025), “Rules for memorizing the names of components when solving equations”, *Educational social network nsportal.ru* [Online], available at: https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/matematika/2023/09/06/pravila-na-zauchivan ie-nazvaniy-komponentov-pri-reshenii (Accessed 02 December 2025) (in Russ.).

Lapitsky, M. K. and Duginov, E. V. (2025), “Methods of solving problems on conservation laws”, *Pedagogicheskaya innovatika i nepreryvnoye obrazovaniye v XXI veke: Sb. nauch. trudov III Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Kirov, 14 maya 2025 goda* [Pedagogical innovation and continuous education in the 21st century: collection of scientific papers of the III International scientific and practical conference, Kirov, May 14, 2025], Vyatka State University of Agrotechnology Publishing House, Kirov, 222-226 (in Russ.).

Lysenko, F. F. and Kulabukhov, S. V. (eds) (2024), *Matematika. Podgotovka k EGE-2025. Profilnyy uroven. 40 trenirovochnykh variantov po demoversii 2025 goda: Uchebno-metodicheskoye posobiye* [Mathematics. Preparation for the Unified State Exam – 2025. Profile Level. 40 Training Options Based on the 2025 Demo Version: Educational and Methodological Guide], Legion, Rostov-on-Don, Russia (in Russ.).

Mokienko, O. P. (2011), “Hermeneutic approach in teaching”, *Science Vector of Togliatti State University. Series: Pedagogy, Psychology*, 3(6), 204-206 (in Russ.). EDN: OCQCNH

Mushenok, Yu. V. (2025), “Errors in solving equations and their overcoming”, *Bulletin of Scientific Conferences*, 8-2(120), 62-64 (in Russ.). EDN: JUEFWV

Razbirayemsya v reshenii lineynykh uravneniy (2025) [Understanding the Solution of Linear Equations], Available at: https://externat.foxford.ru/polezno-znat/wiki-algebra-metody-resheniya-sistem-linejnyh-uravnenij?ysclid=mev9ie05ki599025509 (Accessed 02 December 2025) (in Russ.).

Skanavi, M. I. (2013), *Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh vo vtuzy* [Collection of Mathematics Problems for Applicants to Technical Universities], 6th ed., ONIKS-LIT; Mir i Obrazovaniye, Moscow, Russia (in Russ.).

Sotnikova, O. A., Fefilova, E. F. and Goza, N. I. (2008), *Germenevticheskiy podkhod k obucheniyu matematike (teoreticheskiy aspekt): Monografiya* [Hermeneutic Approach to Teaching Mathematics (Theoretical Aspect): Monograph], Publishing House of the Komi Republic Academy of Public Administration and Management, Syktyvkar, Russia (in Russ).

Информация о конфликте интересов: авторы не имеют конфликта интересов для деклараций.
Conflict of Interests: the authors have no conflict of interests to declare.

ОБ АВТОРАХ:

Ерыгина Нелли Сергеевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики, факультет математики и естественнонаучного образования, Педагогический институт, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия; *erygina_n@bsuedu.ru*

Пеньков Виктор Евгеньевич, доктор философских наук, кандидат педагогических наук, профессор кафедры математики, факультет математики и естественнонаучного образования, Педагогический институт, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия; *penkov@bsuedu.ru*

ABOUT THE AUTHORS:

Nelly S. Erygina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer at the Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Science Education, Pedagogical Institute, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia; *erygina_n@bsuedu.ru*

Victor E. Penkov, Doctor of Philosophy, Candidate of Pedagogical Sciences, Professor at the Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Science Education, Pedagogical Institute, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia; *penkov@bsuedu.ru*